

# МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ

---

---

УДК 53.08

DOI 10.21685/2072-3059-2019-4-8

А. С. Кравчук, А. И. Кравчук

## УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА ПРИ СЖАТИИ ПО ИЗМЕРЕННОЙ ТВЕРДОСТИ ПО МЕЙЕРУ

### **Аннотация.**

*Актуальность и цели.* Объектом исследования является задача об упругопластическом вдавливании индентеров различной формы в упругопластическое покрытие. Актуальность задачи обусловлена тем, что она является теоретической основой измерений твердости поверхности деталей на производстве. Предметом исследования является установление связи между показателями твердости поверхности по Мейеру и предела текучести при сжатии. Цель исследования – построение уточненных формул, связывающих твердость по Мейеру и предел текучести при сжатии с учетом упрочнения материала при сжатии.

*Материалы и методы.* Уточненная теория определения параметров пластического течения материала при сжатии по измеренной твердости по Мейеру построена с использованием обобщенной стержневой модели покрытия. Рассматриваются все типы индентеров, используемых как в промышленности, так и в научных исследованиях. В качестве аппроксимации упругопластического поведения материала используется общеизвестная билинейная диаграмма Прандтля. Именно она нашла наиболее широкое распространение в инженерно-ориентированном программном обеспечении для моделирования упругопластического поведения конструкций.

*Результаты.* Впервые получены уравнения, определяющие связь двух параметров пластичности при сжатии (предела текучести и отношения модуля пластичности к модулю упругости) со значениями твердости по Мейеру. Термин «модуль пластичности» определяет угол наклона участка упрочнения к оси деформаций. Поскольку полученные в статье результаты формально не зависят от толщины покрытия, то их можно трактовать как универсальные, верные для любых твердых тел.

*Выводы.* Установлено, что для однозначного определения двух параметров пластичности при сжатии проще всего использовать два индентера разной формы. Это могут быть шары различных диаметров, либо шар и конус со стандартным углом при вершине, либо шар и пирамида (также со стандартным углом наклона граней). При этом на первом шаге за счет выбора относительно большого диаметра шара и малой силы исследователь получит возможность однозначно определиться с пределом текучести, а уже второй пара-

---

© Кравчук А. С., Кравчук А. И., 2019. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

метр будет определяться по внедрению второго индентера (шара малого радиуса, конуса или пирамиды).

**Ключевые слова:** упругопластическое вдавливание индентора, билинейная диаграмма Прандтля, упрочнение, модуль пластичности, предел текучести.

*A. S. Kravchuk, A. I. Kravchuk*

## AN IMPROVED THEORY OF DETERMINING THE PARAMETERS OF PLASTIC FLOW OF MATERIAL UNDER COMPRESSION BY MEASURED MEYER HARDNESS

### **Abstract.**

*Background.* The research object is a problem of elastoplastic indentation of indenters of various shapes in an elastoplastic coating. It is relevant as it is the theoretical basis for measuring the surface hardness of parts in production. The research subject is the establishment of a relationship between the surface Meyer hardness and yield strength under compression. The aim of the study is to construct improved formulas that bind Meyer hardness and yield strength under compression, taking into account the hardening of the material under compression.

*Materials and methods.* An improved theory of determining the parameters of the plastic flow of a material under compression by the measured Meyer hardness is constructed using a generalized core model of the coating. All types of indenters used both in industry and in scientific research are considered. As an approximation of the elastoplastic behavior of the material, the well-known Prandtl bilinear diagram is used. It was this diagram that found the most widespread use in engineering-oriented software for modeling the elastic-plastic behavior of a structure.

*Results.* For the first time, equations are obtained that determine the relationship between two plasticity parameters under compression (yield strength and the ratio of the plastic modulus to the elastic modulus) with the values of Meyer hardness. The term “plasticity modulus” is a direct borrowing from the manual to the ANSYS finite element calculation program. It determines the angle of inclination of the hardening section to the axis of deformation. Since the results obtained in the article formally do not depend on the thickness of the coating, they can be interpreted as universal, true for any solids.

*Conclusions.* It is established that for the unambiguous determination of two plasticity parameters during compression, it is easiest to use two indenters of different shapes. It can be balls of various diameters, or a ball and a cone with a standard angle at the apex, or a ball and a pyramid (also with a standard angle of inclination of the faces). In this case, at the first step, due to the choice of a relatively large diameter of the ball and low force, the researcher will be able to uniquely determine the yield strength, and the second parameter will be determined by the introduction of the second indenter (a ball of small radius, a cone or a pyramid).

**Keywords:** elastic plastic indentation, Prandtl bilinear diagram, hardening, plasticity modulus, yield strength.

### **Введение**

Теоретическое изучение механики контактного взаимодействия важно как по практическим соображениям, так и с точки зрения общего развития знаний о твердом теле [1–3]. Одним из наиболее востребованных в практических исследованиях направлением является решение контактных задач, моделирующих статические испытания на твердость [2].

Актуальность этого направления исследований также подчеркивается количеством экспериментальных исследований, выполненных на разных масштабных уровнях [4, 5].

С другой стороны, отсутствие адекватных решений модельных задач, соответствующих условиям проведения экспериментальных исследований, иногда может приводить к тому, что исследователи, не имея достаточного опыта, делают неверные выводы о характеристиках материала.

Определению параметров пластического упрочнения материала по результатам вдавливания инденторов посвящен ряд работ [6, 7]. Но специфичность использованных авторами [6, 7] аппроксимаций пластического поведения, отсутствие пояснений, каким образом им удалось избежать влияния упругих деформаций на результаты определения параметров упрочнения при вдавливании конического индентора и, соответственно, на определяемые пластические характеристики, не позволяют широко применить полученные данные в существующих программах конечноэлементного анализа [8] при решении проектных задач.

В данной статье последовательно решается упругопластическая задача о вдавливании индентора в стержневую модель покрытия. Рассматриваются все типы инденторов, используемых как в промышленности, так и в научных исследованиях. В качестве аппроксимации упругопластического поведения материала используется общеизвестная билинейная диаграмма Прандтля. Именно она нашла наиболее широкое распространение в инженерно-ориентированном программном обеспечении для моделирования упругопластического поведения конструкций [8].

Одной из задач, не нашедших до настоящего времени отражения в теоретической литературе, является решение упругопластической контактной задачи с учетом упрочнения материала при сжатии в соответствии с билинейной диаграммой Прандтля, при этом для идеально пластических тел (без упрочнения) можно найти достаточно решений [2, 3, 9, 10]. В связи с этим авторы решили восполнить этот пробел и с использованием обобщенной стержневой модели покрытия получить уравнения, связывающие твердость по Мейеру, предел текучести при сжатии, а также отношение модуля пластичности при сжатии к модулю упругости. Терминологически необходимо уточнить, что словосочетание «модуль пластичности» – это прямое заимствование из руководства к программе конечноэлементных расчетов ANSYS [8]. Он определяет угол наклона участка упрочнения к оси деформаций. Естественно, необходимо отметить, что при идеальнопластическом поведении материала модуль пластичности равен нулю и, очевидно, не может быть больше модуля упругости.

Целью работы является выявление влияния параметров билинейной аппроксимации кривой упрочнения при сжатии на напряженно-деформированное состояние в области контакта, а также на определение такой технологической величины, как твердость поверхности изделия по Мейеру.

### **1. Основные гипотезы**

Предполагается, что поверхность покрытия плоская. Это значит, что отклонения поверхности малы в сравнении с глубиной внедрения индентора

[11]. Деформируемое покрытие покрывает гладкое жесткое полупространство [3, 10].

Предполагается, что покрытие может быть заменено призматическими стержнями с постоянным квадратным сечением  $\Delta \times \Delta$  в плоскости  $XOY$  и высотой  $h$  в  $Z$ -направлении. Стержни могут перемещаться только в  $Z$ -направлении, при этом напряженно-деформированное состояние каждого призматического элемента является однородным. Размер  $\Delta$  пренебрежимо мал в сравнении с наименьшим характерным размером области контакта в плоскости  $XOY$  [3, 10].

Нелинейная функция  $\mathfrak{S}(\varepsilon)$  в диаграмме сжатия будет определяться билинейной диаграммой Прандтля:

$$\mathfrak{S}(\varepsilon) = \begin{cases} E \cdot \varepsilon, & \frac{\sigma_T^{сж}}{E} < \varepsilon \leq 0, \\ \sigma_T^{сж} + E_T^{сж} \cdot \left( \varepsilon - \frac{\sigma_T^{сж}}{E} \right), & \varepsilon \leq \frac{\sigma_T^{сж}}{E}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $E$ ,  $E_T^{сж}$ ,  $\sigma_T^{сж}$  – характерные для материала константы: модуль упругости, модуль пластичности, предел текучести, определяемые исходя из аппроксимации с помощью (1) диаграммы одноосного сжатия образца материала. Отметим, что значение  $\sigma_T^{сж}$  (1) должно быть отрицательным.

В статье предполагается, что постановка всех задач имеет геометрическую и физическую симметрию и, соответственно, главные опрокидывающие внедряемый штамп моменты равны нулю.

## 2. Вдавливание параболоида вращения

Перемещения  $w(r,0)$  и деформации  $\varepsilon(r,0)$  в области контакта при внедрении абсолютно жесткого параболоида вращения с уравнением границы при касании поверхности покрытия  $f(r) = \frac{r^2}{2R}$  (где радиус кривизны параболоида в вершине  $R$ ) в рамках стержневой модели покрытия определяются выражениями (рис. 1) [3, 10]:

$$w(r,0) = \frac{r^2 - a^2}{2R}, \quad \varepsilon(r,0) = \frac{w(r,0)}{h} = \frac{r^2 - a^2}{2R \cdot h}, \quad (2)$$

где  $a$  – радиус области контакта.

При этом максимальная глубина  $\delta$  вдавливания индентора определяется исходя из элементарного равенства

$$\delta = w(0,0) = \frac{-a^2}{2R}. \quad (3)$$

Отметим, что деформации сжатия в области контакта монотонно возрастают при стремлении  $r$  к нулю, поэтому существует граница круга пластических деформаций  $a_T$  ( $a_T \in [0, a)$ ) такая, что выполнено равенство (рис. 2) [3, 10]:

$$\varepsilon(a_T, 0) = \frac{\sigma_T^{сж}}{E}. \quad (4)$$

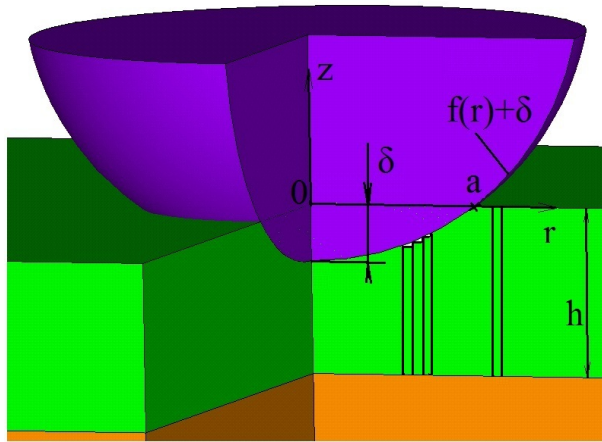


Рис. 1. Вдавливание параболоида вращения в покрытие конечной высоты

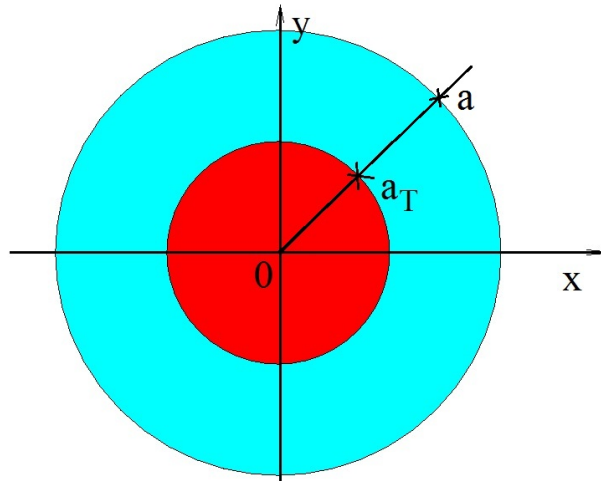


Рис. 2. Распределение напряжений в области контакта параболоида вращения и покрытия (голубой цвет – упругие, красный цвет – пластические напряжения)

Отметим, что  $a_{\text{пласт}}$  теоретически является измеренным радиусом пластического отпечатка после снятия нагрузки (рис. 2) [3, 10].

Из (2) и (4) можно получить два равенства [3, 10]:

$$|\sigma_T^{сж}| = E \frac{a^2 - a_T^2}{2R \cdot h}, \quad (5)$$

$$a_T = \sqrt{\left( a^2 - 2R \cdot h \cdot \frac{|\sigma_T^{сж}|}{E} \right)}. \quad (6)$$

Таким образом, согласно (6) при  $a \geq \sqrt{2R \cdot h \cdot \frac{|\sigma_T^{сж}|}{E}}$  существует вычисляемый круг радиуса  $a_T$ , внутри которого происходит пластическая деформация стержня, а снаружи этого круга уравнение состояния линейно упругое. Исходя из этого описания и с учетом (1) можно получить распределение напряжений в области контакта:

$$\sigma_z = \mathfrak{S}(\varepsilon) = \begin{cases} E \cdot \frac{r^2 - a^2}{2 \cdot R \cdot h}, & a_T < r \leq a, \\ \sigma_T^{сж} + E_T^{сж} \cdot \left( \frac{r^2 - a^2}{2 \cdot R \cdot h} - \frac{\sigma_T^{сж}}{E} \right), & 0 \leq r \leq a_T. \end{cases} \quad (7)$$

Перейдем к рассмотрению уравнения равновесия для параболоида вращения. Из (11) и (7) получаем нелинейное уравнение для определения величины нагрузки  $P$  по заданному радиусу контакта  $a$  (при  $a \geq \sqrt{2R \cdot h \cdot \frac{|\sigma_T^{сж}|}{E}}$ ):

$$\begin{aligned} P = -2\pi \int_0^a \sigma_z(r, 0) \cdot r dr &= -2\pi \cdot \left( \int_0^{a_T} \left( \sigma_T^{сж} + E_T^{сж} \cdot \left( \frac{r^2 - a^2}{2 \cdot R \cdot h} - \frac{\sigma_T^{сж}}{E} \right) \right) \cdot r dr + \right. \\ &+ \left. \frac{E}{2R \cdot h} \cdot \int_{a_T}^a (r^2 - a^2) \cdot r dr \right) = \pi \cdot \left( |\sigma_T^{сж}| \cdot a_T^2 - |\sigma_T^{сж}| \cdot a_T^2 \cdot \frac{E_T^{сж}}{E} + \right. \\ &+ \left. \left( E \frac{a^2 - a_T^2}{2 \cdot R \cdot h} \right) \cdot \frac{a^2 - a_T^2}{2} - \left( E \frac{a^2 - a_T^2}{2 \cdot R \cdot h} \right) \cdot \frac{E_T^{сж}}{E} \cdot \frac{a^2 - a_T^2}{2} + \frac{a^4 \cdot E_T^{сж}}{4 \cdot h \cdot R} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Используя равенство (5), перепишем (8) в виде

$$P = \pi \cdot |\sigma_T^{сж}| \cdot a_T^2 \left( \left( 1 - \frac{E_T^{сж}}{E} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{a_T^2} - 1 \right) \right) + \frac{1}{|\sigma_T^{сж}| \cdot a_T^2} \frac{a^4 \cdot E_T^{сж}}{4 \cdot h \cdot R} \right). \quad (9)$$

Следует отметить, что (5) в случае идеально пластического тела ( $E_T^{сж} = 0$ ) совпадает с результатами более ранних работ авторов [3, 10]. Поскольку из (5) следует равенство  $2R \cdot h \cdot |\sigma_T^{сж}| = E \cdot (a^2 - a_T^2)$ , то можно продолжить преобразования (9) с использованием известного равенства, получаемого из (3), для параболоида вращения  $a = \sqrt{2 \cdot R \cdot |\delta|}$  (где  $|\delta|$  – абсолютное значение глубины вдавливания):

$$P = \pi \cdot |\sigma_T^{сж}| \cdot a_T^2 \left( \left( 1 - \frac{E_T^{сж}}{E} \right) \cdot \frac{(1 + \beta_{ш}^2)}{2} + \frac{E_T^{сж}}{E} \cdot \frac{\beta_{ш}^4}{2 \cdot (\beta_{ш}^2 - 1)} \right), \quad (10)$$

где

$$\beta_{\text{шара}} = \frac{a}{a_T} = \frac{\sqrt{2 \cdot R \cdot |\delta|}}{a_T}. \quad (11)$$

Продолжив преобразования (10), можно получить:

$$P = \pi \cdot |\sigma_T^{\text{сж}}| \cdot a_T^2 \cdot \frac{(1 + \beta_{\text{ш}}^2)}{2} \left( 1 + \frac{E_T^{\text{сж}}}{E} \frac{1}{(\beta_{\text{ш}}^4 - 1)} \right).$$

Деля обе части предыдущего уравнения на площадь пластического отпечатка  $\pi \cdot a_T^2$ , получаем выражение для определения  $|\sigma_T^{\text{сж}}|$  и отношения  $\frac{E_T^{\text{сж}}}{E}$  по результатам вдавливания индентора:

$$HM = |\sigma_T^{\text{сж}}| \cdot \frac{(1 + \beta_{\text{ш}}^2)}{2} \left( 1 + \frac{E_T^{\text{сж}}}{E} \frac{1}{(\beta_{\text{ш}}^4 - 1)} \right). \quad (12)$$

Исходя из (12) можно сформулировать требования к определению пластических параметров материалов при вдавливании шаровидного индентора (статическая твердость по Бринеллю). Учитывая, что при сжатии  $\frac{E_T^{\text{сж}}}{E} < 0,3$  на первом шаге, необходимо добиться за счет выбора большого радиуса индентора и относительно малой силы вдавливания, чтобы коэффициент  $\beta_{\text{ш}}$  (11) был более или равен 1,5. В этом случае (12) преобразуется к более простому виду:

$$HM \approx |\sigma_T^{\text{сж}}| \cdot \frac{(1 + \beta_{\text{ш}}^2)}{2}. \quad (13)$$

Таким образом, в указанных выше условиях твердость по Мейеру не будет зависеть от модуля  $E_T^{\text{сж}}$ , т.е. не будет зависеть от упрочнения материала, и абсолютная величина предела текучести при сжатии  $|\sigma_T^{\text{сж}}|$  будет определена однозначно.

Далее можно за счет уменьшения радиуса индентора и увеличения силы вдавливания довести  $\beta_{\text{ш}}$  до значений меньших либо равных 1,2. Это позволит вычислить отношение  $\frac{E_T^{\text{сж}}}{E}$  по (12) с учетом ранее определенного значения  $|\sigma_T^{\text{сж}}|$ .

Поскольку предварительно можно определить модуль упругости  $E$  на разрывной машине, то предлагаемая методика позволяет определить два параметра пластичности материала при сжатии  $|\sigma_T^{\text{сж}}|$  и  $E_T^{\text{сж}}$ .

### 3. Решение задачи для конического индентора

В случае вдавливания осесимметричного конического абсолютно жесткого индентора с уравнением границы  $\text{tg}(\alpha) \cdot r + \delta$  (где  $\alpha$  – угол между об-

разующей и поверхностью покрытия) перемещения и деформации в области контакта определяются выражениями (рис. 3) [3, 10]:

$$w(r,0) = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot (r - a), \quad \varepsilon(r,0) = \frac{w(r,0)}{h} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot (r - a)}{h}. \quad (14)$$

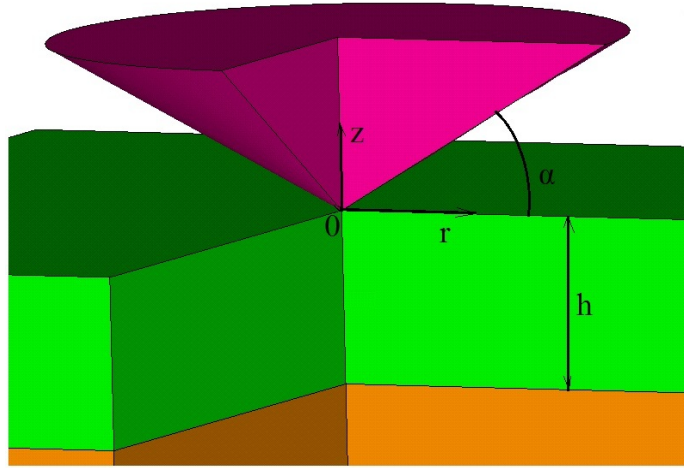


Рис. 3. Контактная задача для конуса

С учетом конической формы индентора максимальная глубина вдавливания индентора определяется исходя из элементарного равенства:

$$\delta = w(0,0) = -\operatorname{tg}(\alpha) \cdot a. \quad (15)$$

Как и ранее, в связи с монотонным возрастанием контактных деформаций при стремлении к центру области контакта будем предполагать, что существует радиус  $a_T$  ( $0 < a_T < a$ ) такой, что выполняется уравнение

$$\varepsilon(a_T,0) = \frac{\sigma_T^{\text{сж}}}{E}. \quad (16)$$

Из (14) и (16) можно получить следующие равенства:

$$|\sigma_T^{\text{сж}}| = E \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot (a - a_T)}{h}, \quad (17)$$

$$a_T = a - \frac{h}{\operatorname{tg}(\alpha)} \frac{|\sigma_T^{\text{сж}}|}{E}. \quad (18)$$

Согласно (18) при  $a \geq \frac{h}{\operatorname{tg}(\alpha)} \frac{|\sigma_T^{\text{сж}}|}{E}$  существует вычисляемый круг ради-

уса  $a_T$ , внутри которого напряжение постоянны и равны  $\sigma_T^{\text{сж}}$ , а снаружи этого круга уравнение состояния линейно упругое. Исходя из этого описания деформаций и с учетом (9) можно получить распределение напряжений в области контакта конического индентора:



$$\sigma_z = \mathfrak{Z}(\varepsilon) = \begin{cases} E \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot (r-a)}{h}, & a_T < r \leq a, \\ \sigma_T^{\text{сжк}} + E_T^{\text{сжк}} \cdot \left( \frac{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot (r-a)}{h} - \frac{\sigma_T^{\text{сжк}}}{E} \right), & 0 \leq r \leq a_T. \end{cases} \quad (19)$$

Подставляя (19) в уравнение равновесия, получаем следующее уравнение (при  $a \geq \frac{h}{\operatorname{tg}(\alpha)} \left| \frac{\sigma_T^{\text{сжк}}}{E} \right|$ ):

$$\begin{aligned} P = -2\pi \int_0^a \sigma_z(r, 0) \cdot r dr = -2\pi \cdot & \left( \int_0^{a_T} \left( \sigma_T^{\text{сжк}} + E_T^{\text{сжк}} \cdot \left( \frac{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot (r-a)}{h} - \frac{\sigma_T^{\text{сжк}}}{E} \right) \right) \cdot r dr + \right. \\ & \left. + \frac{E}{h} \cdot \int_{a_T}^a \operatorname{tg}(\alpha) \cdot (r-a) \cdot r dr \right) = \pi \cdot \left( \left| \sigma_T^{\text{сжк}} \right| \cdot a_T^2 \left( 1 - \frac{E_T^{\text{сжк}}}{E} \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot (E - E_T^{\text{сжк}}) \cdot \frac{(a-a_T)^2 \cdot (a+2 \cdot a_T)}{3 \cdot h} + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot E_T^{\text{сжк}} \cdot \frac{a^3}{3 \cdot h} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

После подстановки (17) выражение (20) можно переписать в виде

$$P = \pi \cdot \left( \left| \sigma_T^{\text{сжк}} \right| \cdot a_T^2 \cdot \left( 1 - \frac{E_T^{\text{сжк}}}{E} \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{a}{a_T} - 1 \right) \cdot \left( \frac{a}{a_T} + 2 \right) \right) + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot E_T^{\text{сжк}} \cdot \frac{a^3}{3 \cdot h} \right). \quad (21)$$

Следует отметить, что (21) в случае идеально пластического тела ( $E_T^{\text{сжк}} = 0$ ) совпадает с результатами более ранних работ авторов [3, 10]. Поскольку из (17) следует равенство  $\left| \sigma_T^{\text{сжк}} \right| \cdot h = E \cdot \operatorname{tg}(\alpha) \cdot (a - a_T)$ , то с использованием известного равенства, получаемого из (15), для конуса  $\beta_k = \frac{a}{a_T} = \frac{|\delta|}{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot a_T}$  (где  $|\delta|$  – абсолютное значение глубины вдавливания) можно продолжить преобразования и из (21) получить:

$$P = \pi \cdot \left| \sigma_T^{\text{сжк}} \right| \cdot a_T^2 \cdot \left( \left( 1 - \frac{E_T^{\text{сжк}}}{E} \right) \cdot \frac{(1 + \beta_k + \beta_k^2)}{3} + \frac{E_T^{\text{сжк}}}{3 \cdot E} \cdot \frac{\beta_k^3}{(\beta_k - 1)} \right).$$

Вынося в последнем равенстве второй множитель первого слагаемого за скобки, окончательно получаем

$$P = \pi \cdot \left| \sigma_T^{\text{сжк}} \right| \cdot a_T^2 \cdot \frac{(1 + \beta_k + \beta_k^2)}{3} \cdot \left( 1 + \frac{E_T^{\text{сжк}}}{E} \cdot \frac{\beta_k^3}{(\beta_k^3 - 1)} \right).$$

Переходя к твердости по Мейеру, можно вывести, что для конического индентора:

$$HM = |\sigma_T^{сж}| \cdot \frac{(1 + \beta_k + \beta_k^2)}{3} \cdot \left( 1 + \frac{E_T^{сж}}{E} \cdot \frac{\beta_k^3}{(\beta_k^3 - 1)} \right). \quad (22)$$

Исходя из (22) можно сформулировать требования к определению пластических параметров материалов при вдавливании конического индентора. Как и ранее предполагая, что при сжатии  $\frac{E_T^{сж}}{E} < 0,3$ , на первом шаге необходимо добиться за счет выбора большего угла раствора конуса (меньшего угла  $\alpha$  при вершине (рис. 3)) и относительно малой силы вдавливания, чтобы коэффициент  $\beta_k$  был более или равен 1,7. В этом случае (22) преобразуется к более простому виду:

$$HM \approx |\sigma_T^{сж}| \cdot \frac{(1 + \beta_k + \beta_k^2)}{3}.$$

В указанных выше условиях твердость по Мейеру не будет зависеть от модуля  $E_T^{сж}$ , т.е. не будет зависеть от упрочнения материала, и абсолютная величина предела текучести при сжатии  $|\sigma_T^{сж}|$  будет определена однозначно.

Далее можно за счет уменьшения угла раствора конуса (увеличения угла  $\alpha$  (рис. 3)) и увеличения силы вдавливания довести  $\beta_k$  до значений, меньших либо равных 1,2. Это позволит вычислить отношение  $\frac{E_T^{сж}}{E}$  по (22) с учетом ранее определенного значения  $|\sigma_T^{сж}|$ .

Отметим, что если угол раствора конуса является стандартным, то для определения двух параметров пластичности целесообразно использовать два индентора: подобрать шар для однозначного определения  $|\sigma_T^{сж}|$  по (13) и использовать стандартный конус для определения отношения  $\frac{E_T^{сж}}{E}$  по (22).

Учитывая, что предварительно можно определить модуль упругости  $E$  на разрывной машине, то предлагаемая методика позволяет определить два параметра пластичности материала при сжатии  $|\sigma_T^{сж}|$  и  $E_T^{сж}$ .

#### 4. Вдавливание многогранной пирамиды с равными боковыми поверхностями

Рассмотрим случай, когда индентором является правильная пирамида с  $m$  гранями, имеющая в качестве боковых  $(m-1)$  равных треугольных граней при вершине. В соответствии с планом решения задач для правильных пирамид (рис. 4) [3, 10] будем рассматривать часть  $\Omega$  правильной многоугольной области контакта  $S$ .

Перемещения и деформации в области  $\Omega$  определяются уравнением

$$w(x, y, 0)|_{\Omega} = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot (x - a),$$

$$\varepsilon(x, y, 0)|_{\Omega} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot (x - a)}{h}.$$

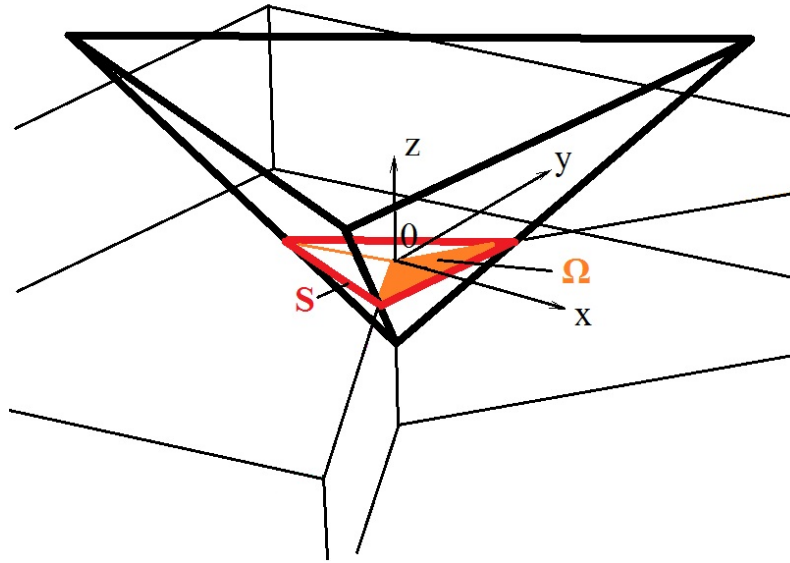


Рис. 4. Контактная область правильной пирамиды с  $m$  гранями (где  $m = 4$ , пирамида Берковича)

Исходя из пирамидальной формы индентера максимальная глубина его вдавливания определяется из элементарного равенства

$$\delta = w(0, 0, 0) = -\operatorname{tg}(\alpha) \cdot a. \quad (23)$$

Не повторяя совершенно аналогичных конусу математических преобразований и опираясь на результаты, подробно изложенные в ранних работах авторов [3, 10], можно утверждать, что для твердости по Мейеру для правильных многогранных пирамид уравнение связывающее его с пределом текучести при сжатии будет иметь вид совершенно аналогичный (22):

$$HM = |\sigma_T^{\text{сж}}| \cdot \frac{(1 + \beta_n + \beta_n^2)}{3} \cdot \left( 1 + \frac{E_T^{\text{сж}}}{E} \cdot \frac{\beta_n^3}{(\beta_n^3 - 1)} \right),$$

где с учетом (23) и того, что  $a_T$  – радиус выписанной в пластический отпечаток окружности, а  $\alpha$  – угол между плоскостями пирамиды и плоскостью покрытия [3, 10], имеем

$$\beta_n = \frac{a}{a_T} = \frac{|\delta|}{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot a_T}.$$

Рассуждая аналогично коническому индентору и исходя из того, что угол при вершине пирамиды является величиной стандартной, то для измерения двух параметров пластичности при сжатии целесообразно использовать

два индентора: шар с относительно большим радиусом и пирамиду со стандартным углом при вершине (совершенно аналогично ранее предложенной паре шар и конус).

### Заключение

Впервые получены уравнения, определяющие связь двух параметров пластичности при сжатии (предела текучести и отношения модуля пластичности к модулю упругости) со значениями твердости по Мейеру.

В данном исследовании использована обобщенная стержневая модель покрытия. Поскольку полученные результаты формально не зависят от толщины покрытия, их можно трактовать как универсальные, верные для любых твердых тел.

Установлено, что для однозначного определения двух параметров пластичности при сжатии проще всего использовать два индентора разной формы. Это могут быть шары различных диаметров, либо шар и конус со стандартным углом при вершине, либо шар и пирамида (также со стандартным углом наклона граней). При этом на первом шаге за счет выбора относительно большого диаметра шара и малой силы исследователь поучит возможность однозначно определиться с пределом текучести, а уже второй параметр будет определяться по внедрению второго индентора (шара малого радиуса, конуса или пирамиды).

### Библиографический список

1. **Джонсон, К.** Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – Москва : Мир, 1989. – 510 с.
2. **Ишлинский, А. Ю.** Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринеля / А. Ю. Ишлинский // Прикладная математика и механика. – 1944. – Т. 8, № 3. – С. 201–224.
3. **Кравчук, А. С.** Прикладные контактные задачи для обобщенной стержневой модели покрытия : монография / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук. – Санкт-Петербург : Научное издание, 2019. – 221 с. – URL: [https://publishing.intelgr.com/archive/core\\_model.pdf](https://publishing.intelgr.com/archive/core_model.pdf) (дата обращения: 24.07.2019)
4. **Марченков, А. Ю.** Исследование микро- и макротвердости материалов и влияния на них скорости индентирования / А. Ю. Марченков, В. М. Матюнин, Е. Б. Опаричев, М. А. Проходцов // Технология металлов. – 2013. – № 2. – С. 54–56.
5. **Быков, Ю. А.** Нанотвердость поверхностного слоя твердых тел / Ю. А. Быков, С. Д. Карпунин // Заготовительные производства в машиностроении. – 2015. – № 6. – С. 40–43.
6. **Коновалов, Д. А.** Напряженно-деформированное состояние в очаге деформации при вдавливании конического бойка в упругопластическую среду / Д. А. Коновалов // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка металлов давлением. – 2006. – № 12. – С. 24–27.
7. **Коновалов, Д. А.** Определение сопротивления деформации по результатам вдавливания конических инденторов / Д. А. Коновалов, С. В. Смирнов, Д. И. Вичужанин // Известия вузов. Черная металлургия. – 2007. – № 3. – С. 69–70.
8. ANSYS. – URL: <https://www.ansys.com> (дата обращения: 24.07.2019).
9. **Kravchuk, A.** Penetration of a pyramid indenter into a multilayer coating / A. Kravchuk, Z. Rymuza, D. Jarzabek // Int. J. Mat. Res. (formerly Z. Metallkd.). – 2009. – Vol. 100, № 7. – P. 933–935.

10. **Кравчук, А. С.** Определение предела текучести материала по результатам статического вдавливания инденторов / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук // Инженерный вестник Дона. – 2018. – № 3. – URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5173> (дата обращения: 24.07.2019).
11. **Кравчук, А. С.** Геометрический критерий надежности измерений микро- и нанотвердости, участков диаграмм вдавливания инденторов, а также кривой ползучести при вдавливании / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук // Перспективы науки. – 2018. – № 9 (108). – С. 12–22.

### **References**

1. Dzhonson K. *Mekhanika kontaktного vzaimodeystviya* [Contact interaction mechanics]. Moscow: Mir, 1989, 510 p. [In Russian]
2. Ishlinskiy A. Yu. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics]. 1944, vol. 8, no. 3, pp. 201–224. [In Russian]
3. Kravchuk A. S., Kravchuk A. I. *Prikladnye kontaktnye zadachi dlya obobshchennoy sterzhnevoy modeli pokrytiya: monografiya* [Applied contact problems for a generalized coating model: monograph]. Saint-Petersburg: Naukoemkie tekhnologii, 2019, 221 p. Available at: [https://publishing.intelgr.com/archive/core\\_model.pdf](https://publishing.intelgr.com/archive/core_model.pdf) (accessed Jul. 24, 2019) [In Russian]
4. Marchenkov A. Yu., Matyunin V. M., Oparichev E. B., Prokhodtsov M. A. *Tekhnologiya metallov* [Metal technologies]. 2013, no. 2, pp. 54–56. [In Russian]
5. Bykov Yu. A., Karpukhin S. D. *Zagotovitel'nye proizvodstva v mashinostroenii* [Blank production in mechanical engineering]. 2015, no. 6, pp. 40–43. [In Russian]
6. Kononov D. A. *Kuznechno-shtampovochnoe proizvodstvo. Obrabotka metallov davleniem* [Press forging. Pressure treatment of metals]. 2006, no. 12, pp. 24–27. [In Russian]
7. Kononov D. A., Smirnov S. V., Vichuzhanin D. I. *Izvestiya vuzov. Chernaya metallurgiya* [University proceedings. Ferrous metallurgy]. 2007, no. 3, pp. 69–70. [In Russian]
8. ANSYS. Available at: <https://www.ansys.com> (accessed Jul. 24, 2019).
9. Kravchuk A., Rymuza Z., Jarzabek D. *Int. J. Mat. Res. (formerly Z. Metallkd.)*. 2009, vol. 100, no. 7, pp. 933–935.
10. Kravchuk A. S., Kravchuk A. I. *Inzhenernyy vestnik Dona* [Don engineering bulletin]. 2018, no. 3. Available at: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5173> (accessed Jul. 24, 2019). [In Russian]
11. Kravchuk A. S., Kravchuk A. I. *Perspektivy nauki* [Prospects of science]. 2018, no. 9 (108), pp. 12–22. [In Russian]

---

#### **Кравчук Александр Степанович**

доктор физико-математических наук,  
доцент, ведущий научный сотрудник  
лаборатории динамики систем  
и механики материалов, Научно-  
исследовательский политехнический  
институт – филиал Белорусского  
национального технического  
университета (Республика Беларусь,  
г. Минск, проспект Независимости, 65)

E-mail: [ask\\_belarus@inbox.ru](mailto:ask_belarus@inbox.ru)

#### **Kravchuk Aleksandr Stepanovich**

Doctor of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
leading researcher, laboratory of systems  
dynamics and materials mechanics,  
Research Polytechnic Institute - a branch  
of Belarusian National Technical  
University (65 Nezavisimosty avenue,  
Minsk, the Republic of Belarus)

**Кравчук Анжелика Ивановна**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра веб-технологий  
и компьютерного моделирования,  
Белорусский государственный  
университет (Республика Беларусь,  
г. Минск, проспект Независимости, 4)

**Kravchuk Anzhelika Ivanovna**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of web technologies  
and computer simulation, Belarusian  
State University (4 Nezavisimosty  
avenue, Minsk, the Republic of Belarus)

E-mail: anzhelika.kravchuk@gmail.com

---

**Образец цитирования:**

Кравчук, А. С. Уточненная теория определения параметров пластического течения материала при сжатии по измеренной твердости по Мейеру / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2019. – № 4 (52). – С. 98–111. – DOI 10.21685/2072-3059-2019-4-8.